DOĞRUSAL PROGRAMLAMA USULLERİNİN ARAZi VE BÜRO ÇALIŞMALARINA UYGULANMASI

Hüsnü KALE

Maden Tetkik ve Arama Enstitüsü, Ankara

I. DOĞRUSAL (LİNEER) PROGRAMLAMANIN MADEN İŞLETMECİLİĞİNE UYGULANMASI

Teknik ve ekonomik araştırmalarda ortaya çıkan birçok problemi doğrusal programlama usulleri ile çözmek mümkündür. Üretim, satış veya maden arama işlemlerinde ortaya çıkan problemler karışıktır, örnek olarak bir maden arama işlemini ele alalım. Elimizde belli sayıda sondaj makinesi, jeofizik araçları, oto, jeolog, mühendis, para, arazide çalışma zamanı v.b. gibi kaynaklar vardır. Diğer taraftan, arazide çeşitli tenor ve rezerve sahip olduğunu sandığımız hedefler (geçen sezonda az çok tespit ettiğimiz) bulunmaktadır. Elimizdeki sınırlı kaynakları arazideki hedeflere en iyi şekilde dağıtarak, maden bulma ihtimalimizi maksimuma çıkarma gayemizi doğrusal programlama usulleriyle gerçekleştirebiliriz. Bu usullerle, ihtimale dayanan bilgilerden kurulu bir problem kadar, ihtimalin mevcut olmadığı problemler de çözülebilir. Aşağıda, bütün madencilerin her zaman karşılaşabilecekleri basit birkaç problem ve çözümü verilmiştir.

Şunu eklemekte fayda vardır: Bugün ileri ülkelerde maden arama, üretim ve ekonomisinin karışık problemleri matematik ve elektronik araçlar yardımıyle çözülmektedir. Matematik ve elektronik araçlar her rasyonel kurum veya madencinin artık kaçınılmaz yardımcısı olarak telâkki edilmelidir.

Doğrusal programlamanın maden endüstrisine uygulanması

Problem ; Bir madencinin M_1, M_2 ve M_3 gibi üç maden işletmesi vardır. Bu işletmelerden birim zaman içinde sırasıyle 4, 7 ve 5 ünite cevher çıkartabilmektedir. Çıkarılan cevher İstanbul ve Ankara şehirlerine satılacaktır. Bu şehirlerdeki alıcılar da birim zaman içinde sırasıyle 8 ve 11 ünite cevher talep etmektedirler. Görülüyor ki, talepte 3 ünite bir fazlalık bulunmaktadır.

Diğer taraftan M_1, M_2 ve M_3 işletmelerinden İst. şehrine nakliye ücreti sırasıyle beher ünite cevher için 6, 5 ve 11 para birimi; ve Ank. şehrine ise sırasıyle 9, 14 ve 10 para birimidir.

Problemin ayrıca şu şartı da verilmektedir: Üç işletmeden çıkarılan cevherin beher ünite başına maliyeti de aynı ve gerek İst. gerekse Ank. şehirlerindeki satış fiyatı ise, ünite başına 22 para birimidir.

Soru: Bu madencinin kârını en çok yapabilmesi için işletmelerden ne kadar cevher çıkarması ve bunları hangi şehirlere sevketmesi gerekir?

Problemin formüle edilmiş şekli. — Kârını maksimum yapabilmek üzere madencinin M_1, M_2 ve M_3 ocaklarından çıkaracağı ve İstanbul şehrine sevkedeceği cevher sırasıyle X_1, X_2 ve X_3 ünite ve Ank. şehrine sevkedeceği cevher de X_4, X_5 ve X_6 ünite olsun.

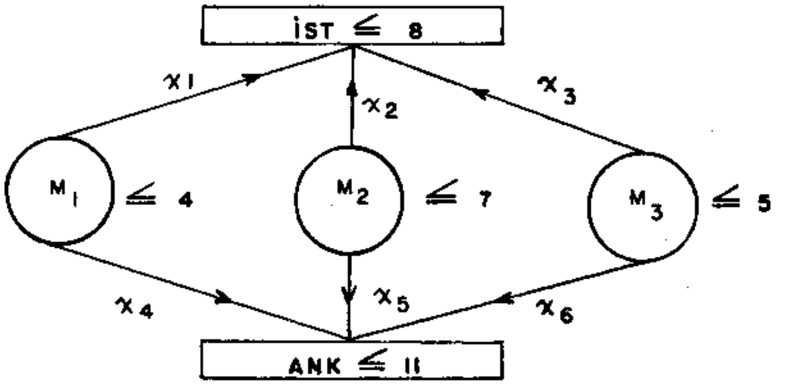
Her bir işletmenin kapasitesi sabit ve yukarıda verilmiş olduğuna göre, İst. ve Ank. şehrine sevkedebileceği cevher bu kapasiteye eşit veya ondan küçük olacaktır:

$$X_1+X_4 \leq 4$$
$$X_2+X_5 \leq 7$$
$$X_3+X_6 \leq 5 \text{ dir.}$$

Diğer taraftan, her iki şehir de kendi talep ettiği cevherden fazlasını almayacaktır:

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 8$$
$$X_4 + X_5 + X_6 \leq 11$$

Bu durumu şema halinde gösterelim:



Nakliyat durumunu şu tablo ile ifade edelim:

NAKLİYE ÜCRETİ birim/para/ünite		.... *İşletmesinden*		
		M_1	M_2	M_3
Şehrine	İst.	6	5	12
	Ank.	9	14	10

Ocakbaşı maliyetleri hepsinde de aynı olduğuna göre, kâr yalnız nakliye ücretleri farkına bağlı olacaktır. O halde (kâr) gaye fonksiyonu:

$$G = (22-6)\ X_1 + (22-5)\ X_2 + (22-12)\ X_3 + (22-9)\ X_4 + (22-14)\ X_5 + (22-10)\ X_6$$

$$G = 16\ X_1 + 17\ X_2 + 10\ X_3 + 13\ X_4 + 8\ X_5 + 12\ X_6 \text{ dır.}$$

Yukarıdaki eşitsizliklere Y ekleyerek eşitlik haline çevirelim:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + X_3 + Y_1 &= 8 \\ X_4 + X_5 + X_6 + Y_2 &= 11 \\ X_1 + X_4 + Y_3 &= 4 \\ X_2 + X_5 + Y_4 &= 7 \\ X_3 + X_6 + Y_5 &= 5 \end{aligned}$$

Bu sınırlar içinde G fonksiyonunu maksimum yapacak olan X_j değerleri nedir ?

Ç ö z ü m :

Problem simplex metoduyle çözülebilir.

Katsayılar matrisi

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ve sütun vektörleri } a_o = \begin{vmatrix} 8 \\ 11 \\ 4 \\ 7 \\ 5 \end{vmatrix}$$

olmak üzere, AX = a eşitliğini kuralım.

G = f (x) fonksiyonu G = C · X şeklinde gösterilebilir. Burada

$$C = \begin{vmatrix} 16 \\ 17 \\ 10 \\ 13 \\ 8 \\ 12 \end{vmatrix} \quad \text{dir ve beş boyutlu } d \geq o \text{ vektörü}$$

$$d = \begin{vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{vmatrix} \quad \text{ve bunun birim matrisi} \quad E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{dir.}$$

Eşitsizlik sistemi bu suretle eşitlik halinde yazılabilir :

$$Ax + Ed = a$$

Burada X=O için a=d dir. Bunu tablo halinde şöyle gösterebiliriz :

			ao	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
	0	e_1	8	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	e_2	11	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0
	0	e_3	4	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
→	0	e_4	7	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
	0	e_5	5	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
			0	+ 16	+ 17 ↑	+ 10	+ 13	+ 8	+ 12	0	0	0	0	0

Simplex işlemi devam ederken, a_1, $a_2 \ldots a_6$ vektörü e_1, $e_2 \ldots e_6$ vektörü ile yer değiştirir.

Son satırın en yüksek değeri (17) seçilir ve bulunduğu sütundaki (1) rakamın a vektörüne bölünmesiyle elde edilen rakamlar kıyaslanarak (1/8 ve 1/7), bunlar arasında en yüksek oran veren satırdan (1/7) giriş yapılır.

Genel simplcx metodu şöyledir :

Veriler :

Baz		a_0	a_1 ...... a_k ...... a_n	e_1 ...... e_j ...... e_m
0	e_1	X_1	b_{11} .... b_{kl} .... b_{nl}	f_{11} ....f_i .... f_{ml}
⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮ ⋮	⋮ ⋮ ⋮
0	e_j	X_j	b_{lj} .... b_{kj} .... b_{nj}	f_{lj} ....f_{ij} .... f_{mj}
⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮ ⋮	⋮ ⋮ ⋮
0	e_m	X_m	b_{lm} .... b_{km} .... b_{nm}	f_{lm} ...f_{jm} .... f_{mm}
		CX	C_1 .... C_k .... C_n	O ...... O ...... O

Çözüm yolu :

Baz		a_0	a_l a_k	e_l e_m
0	e_l	(X_1-Ub_{kl})	(b_{11}-U_1C_{kl})....0....(b_{nl}-U_n b_{kl})	(f_{11}-U_{el} b_{kl})...f_{ml} -$U_{em}b_{km}$
⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮ ⋮	⋮ ⋮
C_k	e_k	U	U_1 1 U_n	U_{el} .... U_{em}
⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮ ⋮	⋮ ⋮
0	e_m	(X_m -U_{km})	(b_{lm}-U_1b_{km}).... 0....(b_{nm}-U_n b_{km})	(f_{1m}-U_{el} b_{km})..(f_{mn}-$U_{em}b_{km}$)
		C_k U	C_1-U_1C_k ......0......(C_n -U_n C_k)	(0-U_{el} C_k)......(0-$U_{em}C_k$)

Burada

$$U = \frac{\chi j}{b_{kj}} \quad ; \quad \frac{b_{ij}}{b_{kj}} = U_i \quad \text{ve} \quad \frac{f_{ij}}{b_{kj}} = U_{ei} \quad \text{olup,}$$

a_k vektörü e_j vektörüyle yer değiştirmiştir.

Simplex işlemi bu duruma göre şöyle devam eder :

		a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
→	0 e_1	1	1	0	1	0	—1	0	1	0	0	—1	0
	0 e_2	11	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0
	0 e_3	4	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
	17 a_2	7	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
	0 e_5	5	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
		119	+16	0	+10	+13	—9	+12	0	0	0	—17	0
			↑										

İkinci adım olarak gaye fonksiyonuna ait vektörün en büyük elemanı olan sayı (16) ile bunun sütununda mevcut elemanın (1) a vektörüne oranının en büyük olduğu elemanın bulunduğu (1/4 ve 1/1 den) satırı seçelim,...e_1 ile a_1 ramplase olur. (Aynen bir önceki işlemde e_4 ün yerine a_2 nin geçmesi gibi.)

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
16 a_1	1	1	0	1	0	—1	0	1	0	0	—1	0
0 e_2	11	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0
→ 0 e_3	3	0	0	—1	1	1	0	—1	0	1	1	0
17 a_2	7	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
0 e_5	5	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
	135	0	0	—6	+13	+7	+12	—16	0	0	—1	0

Üçüncü adım olarak 4. sütun ve 3. satırı ele alalım (e_3 baz vektörü a_4 ile yer değiştirir).

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
16 a_1	1	1	0	1	0	—1	0	1	0	0	—1	0
0 e_2	8	0	0	1	0	0	1	1	1	—1	—1	0
13 a_4	3	0	0	—1	1	1	0	—1	0	1	1	0
17 a_2	7	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
→ 0 e_5	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1
	174	0	0	+7	0	—6	+12	—3	0	—13	—14	0

Aynı işleme devam ederek 6. sütün ve 5. satırı ele alalım (burada e_5 baz vektörü a_6 ile ramplase olur).

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
16 a_1	1	1	0	1	0	—1	0	1	0	0	—1	0
0 e_2	3	0	0	0	0	0	0	1	1	—1	—1	—1
13 a_4	3	0	0	—1	1	1	0	—1	0	1	1	0
17 a_2	7	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
12 a_6	5	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
	234	0	0	—5	0	—6	0	—3	0	—13	—14	—12

S o n u ç: Bu tablonun son satırında pozitif değer bulunmadığından, işlem bitmiştir; yani aranan maksimum değer zaten ortaya çıkmıştır.

Burada X_1, X_2, X_4 ve X_6 değişkenlerinin katsayıları olan a_1, a_2, a_4 ve a_6 önemlidir. a_0 sütunundan bunlar için bulunan değerler yazılırsa:

$X_1 = 1$ $y_1 = 0$

$X_2 = 7$ $y_2 = 3$

$X_4 = 3$ $y_3, y_4, y_5, y_6 = 0$ dir.

$X_6 = 5$

Bu değerler gaye fonksiyonunda yerine konursa:

$G = 16.1 + 17.7 + 13.3 + 12.5$

$G = 234$ bulunur. Bu, elde edilebilecek maksimum kârdır.

Yani M_1 ocağından $X_1 = 1$ ünite, M_2 ocağından $X_2 = 7$ ünite cevher çıkarıp, bunların toplamı olan 8 ünite cevheri İst. şehrine sevkedecektir. Diğer taraftan: M_1 ocağından $X_4 = 3$ ünite ve M_3 ocağından $X_6 = 5$ ünite cevheri de Ank. şehrine sevkedecektir. İst. şehrine nakliyat için $6.1 + 7.5 = 41$ para birimi; Ank. şehrine nakliyat için $9.3 + 10.5 = 77$ para birimi ödeyecektir. Bu ücretler, ödenecek minimum nakliye ücretidir.

II. DOĞRUSAL PROGRAMLAMANIN BÜRO ÇALIŞMALARINA UYGULANMASI (ÖZEL HAL)

Elemanları en iyi şekilde işe yerleştirmek

Problem: Bir serviste 6 iş ve bu işlerin hepsini de yapabilecek kabiliyette 6 eleman vardır. Yapılan bir deneme imtihanından sonra her elemanın (saat tutularak) herbir işi kaç saatte yapabildikleri tespit edilmiştir. İmtihanın kronometraj sonucu aşağıdaki tabloda gösterilmiştir. Bu tabloda, her elemana verilen aynı işin kaç saatte yapıldığı görülmektedir.

Tablo - 1

		Elemanlar					
		A	B	C	D	E	F
İŞLER	I Korelâsyon	8	7	7	9	6	16
	II Tercüme	12	16	13	11	15	14
	III İstatistik	5	9	6	12	4	10
	IV Ekonomik araştırma	11	17	15	15	10	4
	V Teknik araştırma	16	12	8	11	13	17
	VI Matematik problem çözme	8	15	19	14	9	13

Bir problemde iş bölümünü 6 ! = 720 şekilde düzenlemek mümkündür. Şüphesiz ki, bazı elemanlar da idareciye bazı işleri yapmak istemediklerini bildirebilirler. Ancak 10 eleman olsaydı iş bölümü 10! = 3 628 800 şekilde düzenlenebilirdi; bu durumda idareci, elemanları işe yerleştirmekte büyük zorlukla karşılaşacaktı.

Zira 3 milyon 628 800 varyantı incelemek bir idarecinin içinden kolay kolay çıkabileceği bir iş değildir. Doğrusal programlamanın özel bir hali olan böyle problemleri aşağıda verilen metotla çözmek mümkündür.

Çözüm: Problemin çözümü için şu sıra takibedilir:

a. Her satırın en küçük rakamı, aynı satırdaki diğer bütün rakamlardan çıkarılır ve aşağıdaki tablo elde edilir (I. satırının en küçük rakamı 6; II. satırının 11; III. satırının 4; IV. satırının 4; V. satırının 8 ve VI. satırının 8 dir).

Tablo - 2

	A	B	C	D	E	F
I	2	1	1	3	0	10
II	1	5	2	0	4	3
III	1	5	2	8	0	6
IV	7	10	11	11	6	0
V	8	4	0	3	5	9
VI	0	7	11	6	1	5

b. Tablo 2 deki her sütunun en küçük rakamı, aynı sütundaki bütün diğer rakamlardan çıkarılır ve aşağıdaki matris elde edilir:

Tablo - 3

	A	B	C	D	E	F
I	2	0	1	3	0	10
II	1	4	2	0	4	3
III	1	4	2	8	0	6
IV	7	9	11	11	6	0
V	8	3	0	3	5	9
VI	0	6	11	6	1	5

c. Yukarıdaki matriste, her satır ve sütunda yalnız bir sıfır bulunacak şekilde rakamlar yuvarlak içine alınır.

Her satıra ve sütuna yalnız bir sıfır tekabül ettiği için, optimum çözüm vardır.

d. Bu durumda:

A eleman VI işine
B eleman I işine
C eleman V işine
D eleman II işine
E eleman III işine
F eleman IV işine yerleştirilmelidir.

e. Bu şekilde bir yerleştirme yapılırsa, elemanlar en az vakit kaybederek bütün işleri yapmış olurlar. Nitekim, Tablo 3 te karşılarında sıfır bulunan hanelerin karşısına Tablo 1 in gerçek değerleri yazılır ve toplanırsa:

A elemanı	**VI. işinde**	....	**8 saat**
B elemanı	**I. işinde**	....	**7 saat**
C elemanı	**V. işinde**	....	**8 saat**
D elemanı	**II. işinde**	....	**11 saat**
E elemanı	**III. işinde**	....	**4 saat**
F elemanı	**IV. işinde**	....	**4 saat**
			42 saat

kaybedeceklerdir. Bundan daha az zaman sarfederek elemanların bütün işleri yapması mümkün değildir.

III. DOĞRUSAL PROGRAMLAMANIN ARAZÎ ÇALIŞMALARINA UYGULANMASI (ÖZEL HAL)

Daha önceki problemde her sütunun karşısına bir sıfır rastlıyor ve her satırda da sıfır bulunduğundan, elemanları yerleştirmekte zorluk çekmiyorduk. Bazı durumlar vardır ki, her satır ve sütunun kesiştiği hanede bir sıfır bulunmayabilir. Bunu bir misal ile açıklayalım.

Ahmet, Basri, Cevat, Durmuş ve Emin'den ibaret bir prospektör ekipi araziye gönderilerek, krom, lityum, molibden, niobyum ve potasyum madenleri aranacaktır. Ancak bazı prospektörler bazı madenleri diğerlerinden daha az tanıyabildiklerinden, bu prospektörler arasında bir imtihan yapılmıştır. Müzede bulunan ve her madene ait 20 şer numune prospektörlerin her birine gösterilmiş ve 20 şer numuneden kaç tanesini tanıyamadıkları aşağıdaki tabloda gösterilmiştir. Tabloya prospektör ve madenlerin baş harfleri konmuştur.

Tablo - 4

	A	B	C	D	E
K	8	13	9	11	12
L	12	12	13	12	14
M	6	10	15	9	8
N	14	11	7	8	11
P	10	13	12	11	14

Soru : Prospektörleri hangi madenlerin aranmasına göndermelidir ki, bu ekip en az hata yapsın.

Çözüm :

a. Ekipin hata matrisi Tablo 8 de verildiğine göre, her satırın en küçük rakamını diğerlerinden çıkaralım.

Tablo - 5

	A	B	C	D	E
K	0	5	1	3	4
L	0	0	1	0	2
M	0	4	9	3	2
N	7	4	0	1	4
P	0	3	2	1	2

b. Her sütunun en küçük rakamını diğerlerinden çıkaralım.

Tablo - 6

	A	B	C	D	E
K	0	5	1	3	2
L	0	0	1	0	0
M	0	4	9	3	0
N	7	4	0	1	2
P	0	3	2	1	0

Görülüyor ki, henüz karar vermek mümkün değildir, çünkü satır ve sütunlarda birden fazla sıfır vardır. Bunun için aşağıdaki işlem yapılır.

c. Sıfır ihtiva eden satır ve sütunlar taranır. Bu tarama yapılırken eğer taralı bir satır ile sütunun kesişme noktasında sıfır varsa buraya 1 eklenir

Tablo - 7

	A	B	C	D	E
K	0	5	1	3	2
L	1	0	1	0	1
M	0	4	9	3	0
N	7	4	0	1	2
P	0	3	2	1	0

d. Taralı alanın dışında kalan rakamlardan en küçüğü diğer bütün dışarıda kalan rakamlardan çıkarılır; taralı alanda kalan rakamlara dokunulmaz. (Taramalarda hangi sütun veya satıra öncelik verilirse verilsin sonucu etkilemez; ancak işlemi uzatır; taramalarda işlemi kısaltmak birkaç ekzersiz ile kolayca başarılabilir.)

Tablo - 8

	A	B	C	D	E
K	0	4	1	2	2
L	1	0	1	0	1
M	0	3	9	2	0
N	7	3	0	0	2
P	0	2	2	0	0

e. Bu tablo kontrol edilerek, her satır ve sütunun kesişme noktasına tek bir sıfır rastlayıp rastlamadığı aranır. Eğer rastlıyorsa çözüm bulunmuştur, rastlamıyorsa d. sıkkındaki işleme devam edilir.

Yukarıda işlem bitmiş ve sıfırlar yuvarlak içine alınmıştır.

f. Bu durumda :

Ahmet	kroma
Basri	lityuma
Cevat	niobyuma
Durmuş........	potasyuma
Emin	molibdene

gönderilirse, bu ekipin arazide yaptığı hataların toplamı minimumdur.

g. Her elemanın arazide yaptığı hataların toplamı Tablo 8 deki gerçek değerleriyle :

Prospektör	*Maden*	*Hata*
Ahmet	krom	8
Basri	lityum	12
Cevat	niobyum	7
Durmuş.......	potasyum	11
Emin	molibden	8
	Toplam	**46**

Bütün bu hatalar $5 \times 20 = 100$ numune farzedilebilir. O halde, bu ekipin hata yapma ihtimali % 46 ve madenleri tanıma ihtimali % 54 tür.