MADEN NUMUNELERİNİN İHTİMALLER HESABI İLE KIYMETLENDİRİLMESİ

Kutlay ORAL

Maden Tetkik ve Arama Enstitüsü, Ankara

GÎRÎŞ

Bugün kalkman memleketlerde tatbik edilen modern ekonomi ve ekonometriye paralel olarak büyük bir kıymet kazanan istatistik tekniği ve bunun bir kısmını teşkil eden ihtimaller hesabı hemen hemen her konuya tatbik edilebilmektedir, istatistiki alternatifler ve ekonomik analizlerde büyük yeri inkâr edilemeyen ihtimaller hesabını madenciliğe sokmak gayesini güden bu çalışma, okuyanları sıkmadan ve onlara kendi branşlarında daha başka tatbik imkânları yaratmak gayesi ile, hem teorisinden ve hem de verdiğimiz bir misalle pratiğinden bahsederek faydalı olmayı gaye edinmiştir.

Bugün maden numunelerinin kıymetlendirilmesinde kullanılan basit aritmetik ortalama yanında, bu tip bir çalışma belki gayet kompleks gibi görünecektir, fakat içinde bulunduğumuz asırda batı ülkelerinde tatbik edilegelen bu usulle sadece cevherin ortalama tenorunu bulmaktan başka hususları da ihtiva etmesi bakımından faydalı olacağı düşüncesiyle, 4 Şubat - 4 Ağustos 1965 tarihleri arasında Hollanda Ekonomi Enstitüsünde (Nctherlands Economic Institute) gördüğüm kurs notları yardımı ile hazırlanmıştır. Şayet faydası takdir edilerek Enstitümüzde de bu usulün tatbiki benimsenecek olursa, o zaman rapor gayesine ulaşmış olacaktır.

Bu sebeple Hollanda Ekonomi Enstitüsüne ve Enstitü elemanlarından istatistikçi Mr. E. de Leede'ye teşekkürü burada zikretmek isterim.

BİNOMİAL DAĞILIM

önce ihtimaller hesabı üzerinde bir parça duralım; elimize aldığımız bir paranın yazı tarafını $\chi=0$ ve tura taraf $\chi=1$ ile değerlendirecek olursak, bir fırlatışta yazı ve tura gelme ihtimalleri biribirine eşittir. Toplam ihtimali 1 ile değerlendirecek olursak, yazı gelme ihtimali, yani $\chi=0$ ihtim $=\frac{1}{2}$ ve tura gelme ihtimali $\chi=1$ ihtimali $=\frac{1}{2}$ dir. Bu defa iki para atarsak, gelmesi ihtimali olan kombinasyonları sıralayalım:

Yazı yazı (0,0); tura tura (1,1); yazı, tura (0,1); tura, yazı (1,0), yani (0,0); (1,1); (0,1); (1,0) olacaktır. Üç para atışında ise, (0,0,0); (0,0,1); (0,1,0); (0,1,1)

(1,0,0); (1,0,1); (1,1,0); (1,1,1) olacaktır.

Bu konuyu biraz daha genelleştirelim. Burada tura gelme ihtimalini *P* ile değerlendirecek olursak, yazı gelme ihtimalini (1-P) ile değerlendirmemiz gerekir, yani toplam ihtimal 1 e eşittir. Yukarıdaki üç para atılması esnasında teşekkül eden kombinasyonlardan birini (1,0,0) kombinasyonunu ele alalım. Burada da bu kombinasyon için ihtimal $P(1\text{-}P)(1\text{-}P)=P(1\text{-}P)^2$ olacaktır. Zira, bileşik hadiselerde olma ihtimali bağımsız hadiselerin olma ihtimallerinin çarpımına eşittir. Meselâ, elimize aldığımız bir zarın yek gelme ihtimali $\frac{1}{6}$ dır, iki zar atışında hep yek gelme ihtimali ise $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ **dır.**

İşi daha da genelleştirecek olursak,

$P(\underline{x}=k) = P^k (1-P)^{n-k} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ gibi genel bir ifade elde edilir. Burada n fırlatılan para sayısı ve k bu paraların teşkil edeceği kombinasyondaki tura sayısıdır.

Yukardaki genel ifadenin manası $\chi=k$ için toplam ihtimaldir. Bunu bir misalle izaha çalışalım : Yazı tura atışında $p = \frac{1}{2}$ ve $1\text{-}p=\frac{1}{2}$ olacağı aşikârdır. Fırlatma sayısı=n = 3 olsun, yani üç parayı birden veya tek parayı üç defa havaya atıyoruz.

Burada genel ifade,

$$P(\underline{X}=k)=\frac{3!}{k!\,(3\text{-}k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-k}=\frac{3!}{k!\,(3\text{-}k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{3-k}$$

$k=0$ (3 yazı gelme ihtimali) $P(X=0) = \frac{3!}{0!\,3!}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{3-0} = \frac{1}{8}$

$k=1$ (2 yazı gelme ihtimali) $P(X=1) = \frac{3!}{1!\,2!}\;\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

$k=2$ (1 yazı gelme ihtimali) $P(X=2) = \frac{3!}{2!\,1!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

$k=3$ (hiç yazı gelmeme ihtimali) $P(X=3) = \frac{3!}{3!\,0!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$

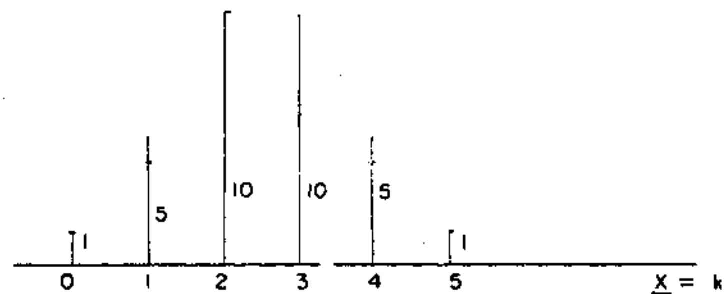
Bu hesabı daha derine gitmeden ihtimalleri Paskal üçgeni vasıtasiyle kolayca bulmak mümkündür.

Atış sayısı	*İhtimaller*	*Paskal üçgeni*
1. atışta	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	1 1
2. atışta	$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{1}{2}$	1 2 1
3. atışta	$\frac{1}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{1}{8}$	1 3 3 1

Görülüyor ki, Paskal üçgeninin her satırı toplam ihtimal, yani 1 olarak alırsak, bu satırdaki her rakamın satır toplamına bölümü ihtimali vermektedir. Yine yazı tura meselesinde Paskal üçgeni ile ihtimalleri sıralayalım. Her satırda ilk ihtimal $k=0$, ikinci $k=1$ .... diye devam etmektedir.

1. atış	1 1	1/2 1/2
2. atış	1 2 1	1/4 2/4 1/4
3. atış	1 3 3 1	1/8 3/8 3/8 1/8
4. atış	1 4 6 4 1	1/16 4/16 6/16 4/16 1/16
5. atış	1 5 10 10 5 1	1/32 5/32 10/32 10/32 5/32 1/32
6. atış	1 6 15 20 15 6 1	1/64 6/64 15/64 20/64 15/64 6/64 1/64

5 para atıştaki ihtimalleri bir grafik üzerinde çizecek olursak,



Burada orta değer $= n.p = 5.\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$ dir. 6 atışta ise

$$n.p = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 \text{ olur.}$$

Bu şekildeki bir dağılmaya «binomial dağılım» adı verilmektedir. Numune dağılımını bu şekildeki bir dağılma ile temsil etmek imkânsızdır. Çünkü binomial dağılım devamlılık göstermez ve $n < 10$ gibi hallerde kullanılır.

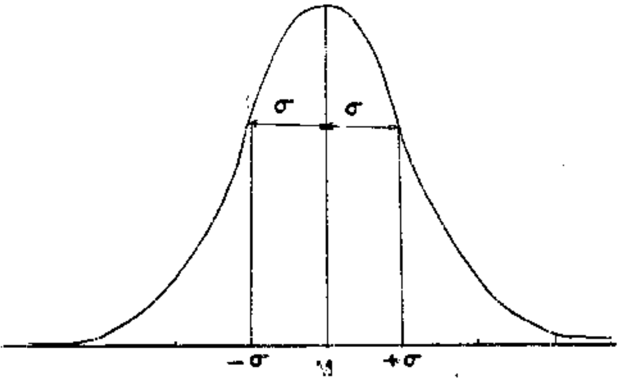
NORMAL DAĞILIM

Şayet $n > 10$ olacak olursa, dağılım normal dağılım sınıfına girer ki, normal dağılım devamlılık gösteren bir dağılımdır.

Genel olarak $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ şeklinde bir fonksiyonla ifade edilen normal dağılımda μ = ortalama değer veya birinci moment ortalama değeri σ = «standart sapma» adını alır. Geometrik olarak σ değeri fonksiyonun dönüm noktasının apsisinin μ ortalama değerine olan mesafesi olarak tanımlanmaktadır. Normal dağılımda toplam ihtimal $F(x)$ gösterilecek olursa,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

Normal dağılım fonksiyonunun simetrik oluşu dolayısiyle]



$$P\left[\underline{x} > \mu\right] = \int_{\mu}^{+\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{2}$$

$$P\left[\underline{x} < \mu\right] = \int_{-\infty}^{\mu} f(x)\, dx = \frac{1}{2}$$

$$P\left[\underline{x} < k\right] = \int_{-\infty}^{k} f(x)\, dx$$

$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ şeklindeki normal dağılım fonksiyonu çok kompleks bir fonksiyon olduğundan, pratikte kullanılışı da çok zordur. Bu sebeple, $\mu=0$ ve $\sigma=1$ alınarak $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ şeklinde bir yeni fonksiyon elde edilir; ki buna «standart normal dağılım» adı verilmektedir. Burada x. in çeşitli değerleri için / *(Y.)* ihtimali % olarak bulunmuş ve cetveller halinde hazırlanmıştır. Bu cetvellere «standart normal dağılım cetvelleri» adı verilmektedir.

Normal dağılımda olduğu gibi, standart normal dağılımda da

$$p\ [\underline{x} < x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \text{ olup,}$$

$$p\ [\underline{x} < \infty] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 1 \text{ ve}$$

$$p\ [\underline{x} < 0] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

STANDART SAPMA VE ORTA DEĞER

Bu şekilde normal dağılımı izah ettikten sonra, yukarıda adı geçen standart sapma ve ortalama değer üzerinde de bir miktar duralım.

Bilindiği gibi, her istatistiki rakam mutlaka başka bir şeye tekabül eder. Meselâ, 1959 daki istihsal 500 ton veya 10-12 yaşları arasındaki nüfus 350870 gibi, işte burada ikinci misalde olduğu gibi bir aralığı tarif eden durum varsa ve bu aralığı *c* ile gösterecek olursak, bu aralıktaki miktarı / ı ile gösteririz. Meselâ, 10-12 yaşlan arasındaki

nüfus 350 870 derken, $c = 2$ ve $fi = 350\,870$ dir. Bunun yanında, 10-12 ortalaması olan 11 rakamı x_i ile gösterilmekte ve bu x_i ler içerisindeki orta değere en yakın olanı x_o ile gösterilmektedir. Bunlardan başka $\sum_{i=1}^{k} fi = n$ ve $k =$ mevcut istatistik sayısıdır. Bütün bu tanımlardan sonra $\mu =$ orta değeri hesaplayalım.

$$\mu = \frac{1}{n} \Sigma x_k = \frac{c \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\chi_i - \chi_o}{c} \cdot fi \right)}{n} + \chi_o \quad , \quad x_k^2 = x_i^2 \cdot fi \text{ alınarak,}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \Sigma \left(\chi_k - \bar{\chi} \right)^2 = \frac{1}{n} \Sigma \left(\chi_k^2 - 2x_k \bar{x} + \bar{x}^2 \right) = \frac{1}{n} \Sigma x_k^2 - \bar{x}^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \Sigma x_k^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \Sigma x_i^2 \cdot fi - \bar{x}^2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2 fi}{n} - \bar{x}^2} \text{ olur; burada } \bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} \text{ dir.}$$

NÜMUNELERİN İHTİMALLER HESABI İLE KIYMETLENDİRİLMESİ MiSALi

Bir yatağı karakterize edecek iyi bir numune dağılımı fonksiyonunu elde edebilmek için, numune sayısını fazla tutmak zorunluluğu vardır. Bunun için aşağıda alacağımız misalde en az 100 numunenin alındığını farzederek hesap yapacağız. Bunun yanında hesaplarda kolaylık maksadı ile tam yüzdeleri alacağız. Misal olarak da ele aldığımız yatağın bir demir yatağı olduğunu kabul edeceğiz.

Numune no.	*% Fe*	*Numune no.*	*% Fe*	*Numune no.*	*% Fe*	*Numune no.*	*% Fe*
1	50	26	50	51	44	76	51
2	44	27	47	52	52	77	51
3	57	28	53	53	42	78	51
4	59	29	43	54	45	79	51
5	39	30	54	55	55	80	49
6	50	31	55	56	57	81	53
7	54	32	62	57	46	82	53
8	48	33	40	58	52	83	53
9	47	34	42	59	58	84	54
10	43	35	52	60	52	85	53
11	56	36	53	61	45	86	48
12	52	37	49	62	50	87	50
13	55	38	46	63	50	88	50
14	63	39	59	64	50	89	38
15	59	40	60	65	46	90	44
16	50	41	46	66	49	91	47
17	44	42	41	67	51	92	48
18	58	43	46	68	47	93	49
19	48	44	45	69	49	94	53
20	61	45	54	70	55	95	48
21	45	46	53	71	51	96	51
22	47	47	57	72	55	97	51
23	51	48	56	73	47	98	57
24	49	49	43	74	52	99	60
25	56	50	41	75	49	100	51

Interval $C = 2$	Xi	Bu aralıktaki numune sayısı fi	$Xi - Xo$	$\frac{Xi - Xo}{C} fi$	$Xi^2 . fi$
% 38 - 40	39	2	— 12	— 12	3 042
% 40 - 42	41	3	— 10	— 15	5 043
% 42 - 44	43	5	— 8	— 20	9 245
% 44 - 46	45	8	— 6	— 24	16 200
% 46 - 48	47	10	— 4	— 20	22 090
% 48 - 50	49	13	— 2	— 13	31 213
% 50 - 52	$51 = Xo$	19	∓ 0	+ 0	49 419
% 52 - 54	53	14	+ 2	+ 14	39 326
% 54 - 56	55	9	+ 4	+ 18	27 225
% 56 - 58	57	7	+ 6	+ 21	22 743
% 58 - 60	59	5	+ 8	+ 20	17 405
% 60 - 62	61	3	+ 10	+ 15	11 163
% 62 - 64	63	2	+ 12	+ 12	7 938
Σ		100	0	— 4	262 052

$$n = \sum_{i=1}^{k} fi = 100$$

$$\mu = \frac{C \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{x_i - x_o}{C} fi \right)}{n} + x_o = \frac{2(-4)}{100} + 51$$

$$\mu = \frac{-8 + 5\,100}{100} = \frac{5092}{100} = 50.92 = \bar{x}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{262\,052}{100} - 50.92^2} = \sqrt{2620.5 - 2592.8} = \sqrt{27.7} = 5.26$$

$$\sigma = 5.26$$

Ele aldığımız demir yatağının bu numunelere göre dağılım fonksiyonu,

$$f\,(x) = \frac{1}{5.26\sqrt{2\pi}} e - \frac{1}{2} \left(\frac{x - 50.92}{5.26} \right)^2$$

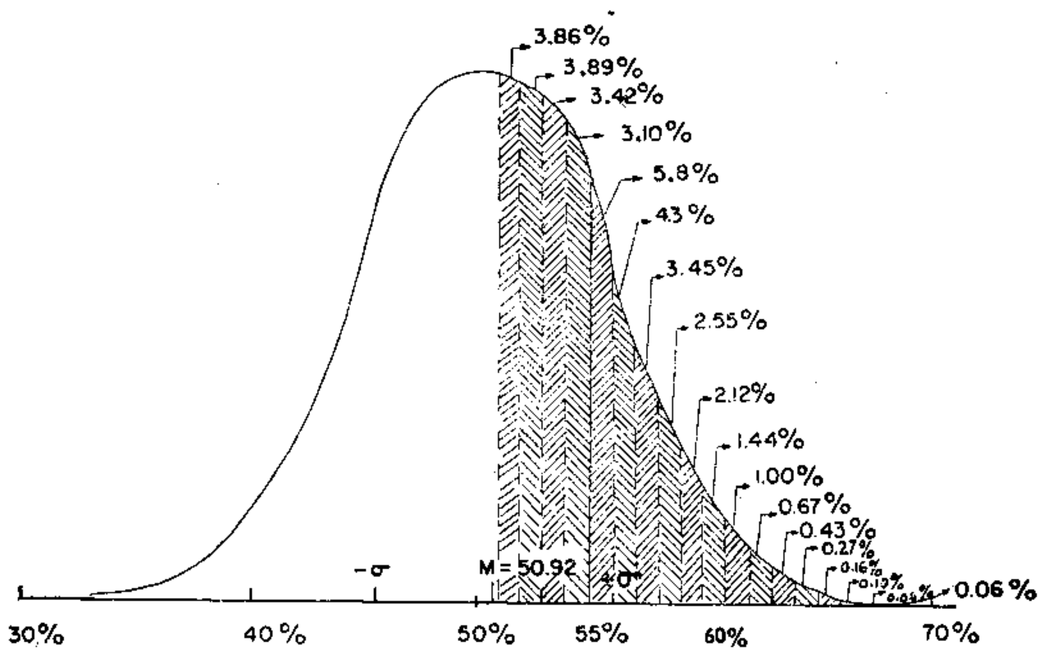
Buradan doğan pratik neticeler şunlardır:

1. Cevherin ortalama tenörü $\mu = \bar{x} = \%\ 50.92$

2. Cevherin % 68.3 ü $\mu \mp \sigma$, yani % (50.92 ∓ 5.26) ağırlığındadır. Bu aralık ise % 45.66 - % 56.18 dır.

3. Cevherin % 95.5 i $\mu \mp 2\,\sigma$, yani % (50.92 ∓ 10.52) ağırlığındadır. Bu aralık ise % 40.40 - % 61.44 dır.

4. Cevherin % 99.9 u $\mu \mp 3\,\sigma$, yani % (50.92 ∓ 15.78) aralığında olması gerekir. Başka bir deyişle, cevherin tamamı % 35.14 - % 66.70 aralığındadır.



Şimdi de belirli bir % Fe miktarı, elde edebileceğimiz cevher miktarı ile bu % Fe için kullanılamayacak cevher miktarı ve tenor sınırını bulalım.

Misal olarak, % 55 Fe lik bir istihsal istendiğini kabul edelim. Dağılım grafiğinden de görüleceği üzere, % 55 Fe den daha düşük tenörlü kısım olduğu gibi, daha yüksek tenörlü kısım da vardır. Belirli bir % Fe den itibaren istihsal yapalım ki, elde edilecek istihsalin ortalama tenörü % 55 Fc olsun. Burada hipotez budur. Çözüm için belirli bir formül olmamakla beraber, bunu araştırma ile bulmak kabildir.

önce, % 55 Fe den fazla tenörlü cevher miktarını ve |bu miktarın % 1 Fe tenor aralığındaki miktarları hesaplayarak, % 55 Fe tenöründen fazla tenörlü kısmın ortalama tenorunu hesaplayalım.

$$P\left[\underline{x} \geq 55\right] = P\left[\sigma\underline{x} + \mu \geq 55\right] = P\left[\underline{x} \geq \frac{55-\mu}{\sigma}\right]$$

Burada görüleceği üzere, elimizdeki normal dağılımı standart normal dağılıma çevirmek için **55—μ** alarak, **% 55 in μ=0** başlangıç noktasından mesafesini ve bu ifadeyi o ya bölerek de a = 1 şekline soktuk. [Bu kısmı genelleştirmek istersek, aldığımız % miktarını *L* ile göstererek $\frac{L-\mu}{\sigma}$ ifadesi 'yardımı ile normal dağılım fonksiyonunu standart normal dağılım haline sokuyoruz. Şimdi tekrar meselemize dönelim.

$$\frac{L-\mu}{\sigma} = \frac{55-50.92}{5.26} = \frac{4.08}{5.26} = 0.76$$

$P\ [x \geq 0.76] = 0.224$ olarak standart normal dağılım cetvelinden bulunur. Yani, cevherin % 22.4 ünün tenörü % 55 ten yukarı imiş. Şimdi de aşağıdaki aralıklardaki cevher miktarlarını hesaplayalım.

% 55 — % 56 arası :

Bunun için % 56 dan fazla olan kısmı hesaplayarak aradaki farkı almanız gerekir.

$$\frac{L - \mu}{\sigma} = \frac{56 - 50.92}{5.26} = \frac{5.08}{5.26} = 0.97$$

$P\ [x \geq 0.97] = 0.166$ % 16.6 miktarı % 56 Fe den fazla tenörlü

% 55-% 56 arası : 22.4—16.6 = 5.8 % 5.8

% 56 — % 57 arası :

$$\frac{L - \mu}{\sigma} = \frac{57 - 50.92}{5.26} = \frac{6.08}{5.26} = 1.16$$

$P\ [x \leq 1.16] = 0.123$ % 12.3 miktarı % 57 den fazla tenörlü

% 56-57 arası : 16.6—12.3 = 4.3 % 4.3

% 57 — % 58 arası :

$$\frac{L - \mu}{\sigma} = \frac{58 - 50.92}{5.26} = \frac{7.08}{5.26} = 1.35$$

$P\ [x \geq 1.35] = 0.0885$ % 8.85 miktarı % 58 den fazla tenörlü,

% 57 - % 58 arası 12.3 — 8.85=3.45 % 3.45

% 58 — % 59 arası :

$$\frac{L - \mu}{\sigma} = \frac{59 - 50.92}{5.26} = \frac{8.08}{5.26} = 1.53$$

$P\ [x \geq 1.53] = 0.0630$ % 6.30 miktarı% 59 dan fazla tenörlü,

% 58 - % 59 arası 8.85 — 6.30=2.55 % 2.55

% 59 — % 60 arası :

$$\frac{L - \mu}{\sigma} = \frac{60 - 50\ 92}{5.26} = \frac{9.08}{5.26} = 1.73$$

$P\ [x \geq 1.73] = 0.0418$ .... % 4.18 miktarı % 60 tan fazla tenörlü % 59 - % 60 arası 6.30 — 4.18 =2.12 % 2 12

% 60 — % 61 arası :

$$\frac{L - \mu}{\sigma} = \frac{61 - 50.92}{5.26} = \frac{10.08}{5.26} = 1\ 92$$

$P\ [x \geq 1.92] = 0.0274$ % 2.74 miktarı % 61 den fazla tenörlü

% 60 - % 61 arası 4.18 — 2.74=1.44... % 1.44

% 61 — % 62 arası :

$$\frac{L - \mu}{\sigma} = \frac{62 - 50.92}{5.26} = \frac{11.08}{5.26} = 2.11$$

$P\ [x \geq 2.11] = 0.0174$ — % 1.74 miktarı % 62 den fazla tenörlü

% 61 - % 62 arası: 2.74 — 1.74 = 1 — % 1

% 62 — % 63 arası :

$$\frac{L - \mu}{\sigma} = \frac{63 - 50.92}{5.26} = \frac{12.08}{5.26} = 2.30$$

$P\ [x \geq 2.30] = 0.0107$ — % 1.07 miktarı % 63 ten fazla tenörlü

% 62 - % 63 arası: 1.74 — 1.07 = 0.67 — % 0.67

% 63 — % 64 arası :

$$\frac{L - \mu}{\sigma} = \frac{64 - 50.92}{5.26} = \frac{13.08}{5.26} = 2.49$$

$P\ [x \geq 2.49] = 0.0064$ — % 0.64 miktarı % 64 ten fazla tenörlü

% 63 - % 64 arası: 1.07 — 0.64 = 0.43 — % 0.43

% 64 — % 65 arası :

$$\frac{L - \mu}{\sigma} = \frac{65 - 50.92}{5.26} = \frac{14.08}{5.26} = 2.68$$

$P\ [x \geq 2.68] = 0.0037$ — % 0.37 miktarı % 65 ten fazla tenörlü

% 64 - % 65 arası: 0.64 — 0.37 = 0.27 — % 0.27

% 65 — % 66 arası :

$$\frac{L - \mu}{\sigma} = \frac{66 - 50.92}{5.26} = \frac{15.08}{5.26} = 2.87$$

$P\ [x \geq 2.87] = 0.0021$ — % 0.21 miktarı % 66 dan fazla tenörlü

% 65 - % 66 arası: 0.37 — 0.21 = 0.16 — % 0.16

% 66 — % 67 arası :

$$\frac{L - \mu}{\sigma} = \frac{67 - 50.92}{5.26} = \frac{16.08}{5.26} = 3.06$$

$P\ [x \geq 3.06] = 0.0011$ — % 0.11 miktarı % 67 den fazla tenörlü

% 66 - % 67 arası: 0.21 — 0.10 — % 0.1

% 67 — % 68 arası :

$$\frac{L - \mu}{\sigma} = \frac{68 - 50.92}{5.26} = \frac{17.08}{5.26} = 3.25$$

$P\ [x \geq 3.25] = 0.0006$ — % 0.06 miktarı % 68 tenörden fazla

% 67 - % 68 arası: 0.10 — 0.06 = 0.04 — % 0.04

% 68 den fazla miktar % 0.6 dır.

Bu durumu bir liste halinde gösterecek olursak,

(1) % tenör aralığı	(2) % ihtimal	(3) % ortalama tenör	(4 = 2 X 3) Fe muhtevası
55-56	5.8	55.5	3.22
56-57	4.3	56.5	2.43
57-58	3.45	57.5	1.98
58-59	2.55	58.5	1.49
59-60	2.12	59.5	1.26
60-61	1.44	60.5	0.87
61-62	1.00	61.5	0.62
62-63	0.67	62.5	0.42
63-64	0.43	63.5	0.27
64-65	0.27	64.5	0.17
65-66	0.16	65.5	0.10
66-67	0.10	66.5	0.07
67-68	0.04	67.5	0.03
> 68	0.06	68.5	0.04

İhtimalleri şayet toplayacak olursak % 22.39 bulunur ki, zaten % 55 ten fazla tenörlü miktarı % 22.4 olarak daha evvel bulmuştuk.

Şimdi de % 55 ten geriye doğru olan % 1 farklık dilimlerden bir miktarını hesaplayalım.

% 54 — % 55 arası:

$$\frac{L-\mu}{\sigma} = \frac{54-50.92}{5.26} = \frac{3.08}{5.26} = 0.58$$

$P\ [x \geq 0.58\ ] = 0.281$ % 27.8 miktarı % 54 ten fazla tenörlü

% 54 - % 55 arası 28.1 — 22.4 = 5.7 % 5.7

% 53 — % 54 arası:

$$\frac{L-\mu}{\sigma} = \frac{53-50.92}{5.26} = \frac{2.08}{5.26} = 0.40$$

$P\ [x \geq 0.40] = 0.345$ % 34.5 miktarı % 53 ten fazla tenörlü % 53-% 54 arası
34.5 — 28.1 = 6.4 % 6.4

% 52 — % 53 arası:

$$\frac{L-\mu}{\sigma} = \frac{52-50.92}{5.26} = \frac{1.08}{5.26} = 0.205$$

$P\ [x \geq 0.205] = 0.419$ % 41.9 miktarı % 52 den fazla tenörlü % 52-% 53 arası : 41.9 — 34.5 = 7.4 % 7.4

% 51 — % 52 arası:

$$\frac{L-\mu}{\sigma} = \frac{51-50.92}{5.26} = \frac{0.08}{5.26} = 0.015$$

$P\ [x \geq 0.015] = 0.494$ **% 49.4 miktarı % 51 den fazla tenörlü**
% 51 - % 52 arası 49.4 — 41.9 = 7.5 %7.5

% 50 — % 51 arası:

$$\frac{L-\mu}{\sigma} = \frac{50-50.92}{5.26} = \frac{0.92}{5.26} = 0.175$$

$P\ [x \geq 0.175] = 0.431$ $P\ [x \geq \%\,50] = 100 - 43.1 = 56.9$ **olur.**

% 50 - % 51 arası : 56.9 — 49.4 = 7.5

Şimdi de % 55 ten daha düşük tenörlü kısmın % 1 tenör aralığına düşen % miktarları, ortalama tenörleri ve Fe muhtevalarını çıkaralım.

(1) *% tenör aralığı*	(2) *% ihtimal*	(3) *% ortalama tenör*	(4 = 2×3) *Fe muhtevası*
54-55	5.7	54.5	3.10
53-54	6.4	53.5	3.42
52-53	7.4	52.5	3.89
51-52	7.5	51.5	3.86
50-51	7.5	50.5	3.79

Burada basit bir tatonman île % 55 Fe tenörlü bir karışım için asgarî tenor haddini ve % 55 Fc elde edebileceğimiz cevher miktarını hesaplayalım.

% 55 Fe tenöründen yüksek tenörlü kısımların ihtimaller toplam % 22.4 ve Fc muhtevaları toplamı 12,97 dir.

Şimdilik düşük tenörlülerden alt sınırı % 50 olarak alalım. Bu kısımdaki ihtimaller toplamı 27.0 ve Fc muhtevaları toplamı 18.06 olduğuna göre, ortalama tenor:

$$\frac{12.97 + 18.06}{22.4 + 34.5} = \frac{31.03}{56.9} = \%\,54.5$$

Şayet % 50 - % 51 dilimini almazsak, ortalama tenör:

$$\frac{12.97 + 14.27}{22.4 + 27.0} = \frac{27.4}{49.4} = \%\,55.14 \text{ olur.}$$

Bu durumda %51 den yüksek tenörlü kısmı alarak, %55.14 Fe lik bir ortalama elde ederiz.

Yatağın %51 den yüksek tenörlü kısmının miktarı ise, % 49.4 kadardır.

Bu durumda %51 Fe tenöründen düşük tenörlü ve yatağın % 50.6 sını teşkil eden kısım ne olacaktır? Muhakkak burasını da işletmek icabeder, fakat bu durumda ortalama tenor düşecektir. Şayet sahanın mineralizasyonu bir intizam arzeder ve yatak için bir izotenör haritası çıkarılacak olursa, % 55 ortalama tenörü tutturacak bir harman ve düşük tenörlü kısım ayrı bir harman olarak stok yapılır. %55 tenörlü kısım doğrudan doğruya satılabileceği için, bunun üzerinde durmadan düşük tenörlü kısmın üzerinde bir miktar duralım. Düşük tenörlü kısım için iki hal tarzı düşünülebilir.

1. Aynı usullerle düşük tenörlü kısmın ortalama tenörü hesaplanır ve bu ortalama tenor üzerinden satış imkânları aranır.

2. Şayet satış imkânı olmazsa veya çok düşük fiyatlar teklif edilecek olursa, bu kısım zenginleştirmeye tabi tutularak hipotezimizde kabul ettiğimiz % 55 Fe tenörüne yükseltilir.

Buraya kadar anlatılan kısmın bir özeti yapılacak olursa, % 55 tenörlü, hemen satışa hazır ekonomik rezerv bütün rezervin % 49.4 ünü teşkil etmekte ve geriye kalan % 50.6 sı düşük tenörlü ve zenginleştirmeye ihtiyaç göstermektedir. (Düşük tenörlü kısmın ortalama tenorunu burada hesaplamıyacağız.)

ALINACAK DİĞER NÜMUNELERİN YATAĞI KARAKTERİZE EDİP ETMEYECEĞİNİN TESTi

Buradan itibaren ayrı bir konuya geçiyoruz ki, burada sistematik olarak alman numuneler yardımı ile bulunan dağılım fonksiyonundan başka, alınacak numunelerle meydana getirilecek daha küçük orandaki bir dağılımın, «ana dağılım» diye tabir ettiğimiz ilk dağılımın kapsamı içine girip girmediğinin testi yapılacaktır. Bu tip problemler daha ziyade cevher satışlarında alıcılar tarafından alınan numunelerin ortalama değerinden dolayı meydana gelen anlaşmazlıklarda karşımıza çıkarlar. Bu kısımda misal olarak aldığımız yatağın tamamen işletilerek satışının yapılabileceğini kabul ediyoruz.

Sistematik bir numune alma neticesinde, yatağı tam karakterize edecek bir dağılma fonksiyonu elde ettik ve bu dağılma fonksiyonunda

$$\mu = \%\ 50.92\ \text{Fe}$$
$$\sigma = 5.26$$

olarak bulundu. Yaptığımız istihsalden bir miktarını sattık ve alıcılar tarafından dört numune alınarak ortalama değer olarak aşağıdaki değerleri bulundu:

$$L_1 = \%\ 49$$
$$L_2 = \%\ 45$$
$$L_3 = \%\ 52$$
$$L_4 = \%\ 46 \qquad \underline{L} = \frac{1}{4}\,(49+45+52+46) = \frac{192}{4} = \%\ 48$$

Bu dört numunenin ortalaması % 48 olarak bulundu. Acaba bu netice bizim yatağımızı karakterize edebilecek nitelikte midir?

Bunun için ortalama değerden sapma miktarını % 5 ihtimalle kabul edeceğiz. Şimdi hesaplanacak sapma miktarı d ile gösterilecek olur ve alıcılar tarafından bulunan ortalama tenor $\mu - d < 48 < \mu + d$ ise, «sıfır hipotezi» adını verdiğimiz hipotez hâkim olup, alıcılar tarafından alman numuneler yatağın cevherini karakterize edecek niteliktedir.

Aksi halde :

$48 > \mu + d$

$48 < \mu - d$ hallerinde ise, alternatif hipotez cari olup, alıcıların aldığı numuneler yatağı karakterize edecek nitelikte değildir.

Yukarıda kabul edilen hipoteze göre,

$$P\left[\underline{L} > \mu + d\right] + P\left[\underline{L} < \mu - d\right] = \alpha\,,\ \alpha = 0.05$$

$$P\left[\frac{\frac{\bar{L}-\mu}{\sigma}}{\sqrt{n}} > \frac{d}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right] + P\left[\frac{\frac{\bar{L}-\mu}{\sigma}}{\sqrt{n}} < -\frac{d}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right] = \alpha$$

Simetriden dolayı,

$$2P\left[\frac{\frac{\bar{L}-\mu}{\sigma}}{\sqrt{n}} > \frac{d}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right] = \alpha \text{ olur.}$$

Buradan n alıcılar tarafından alınan numune sayısı olup, standart hata $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sigma m$ dir.

$$\sigma m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5.26}{\sqrt{4}} = \frac{5.26}{2} = 2.63 \text{ olur.}$$

$\frac{\bar{L}-\mu}{\sigma m} = T$ dersek,

$$2\,P\left[T > \frac{d}{\sigma m}\right] = 2\,P\left[T > \frac{d}{2.63}\right] = \alpha \text{ ve } P\left[T > \frac{d}{2.63}\right] = \frac{\alpha}{2} \text{ olur.}$$

$0.025 = P\left[T > \frac{d}{2.63}\right]$ için standart normal dağılım cetveline bakılacak olursa,

$\frac{d}{2.63} = 1.96$ olarak bulunur.

$d = 1.96 \times 2.63 = 5.15$

$50.92 - 5.15 = \%45.77$

$50.92 + 5.15 = \%56.07$

Bulunan %48 değeri $45.77 < 48 < 56.07$ olduğundan, sıfır hipotezi cari olup, alıcıların aldığı bu numune esas yatağı karakterize eder.

Şimdi, yüksek tenörlü cevherlerin alıcılar tarafından protesto edilmeyeceği düşüncesiyle, bu şekilde iki taraflı bir teste lüzum olmayıp, sadece sol taraf testi yapılabilir. Bu sol taraf testinde:

Sıfır hipotezi $\mu \geq 50.92$

Alternatif hipotez $\mu < 50.92$ olarak kabul edilmektedir.

Burada da diğerine benzer usul kullanacağız:

$$P\left[\bar{L} < \mu - d\right] = 0.05$$

$P\left[T < -\frac{d}{\sigma m}\right] = 0.05$ olur ve tablodan $= 0.05$ için

$\frac{d}{2.63} = 1.64$ bulunur. Buradan $d = 1.64\ \sigma m = 1.64 \times 2.63$ $d = 4.31$ olarak hesaplanır.

Tablo 1 - Standart normal dağıtım cetveli*

X	P (%)	X	P (%)	X	P (%)	X	P (%)
0.00	50.0	0.30	38.2	0.60	27.4	0.90	18.4
0.01	49.6	0.31	7.8	0.61	27.1	0.91	18.1
0.02	49.2	0.32	37.4	0.62	26.8	0.92	17.9
0.03	48.8	0.33	37.1	0.63	26.4	0.93	17.6
0.04	48.4	0.34	36.7	0.64	26.1	0.94	17.4
0.05	48.0	0.35	36.3	0.65	25.8	0.95	17.1
0.06	47.6	0.36	35.9	0.66	25.5	0.96	16.9
0.07	47.2	0.37	35.6	0.67	25.1	0.97	16.6
0.08	46.8	0.38	35.2	0.68	24.8	0.98	16.4
0.09	46.4	0.39	34.8	0.69	24.5	0.99	16.1
0.10	46.0	0.40	34.5	0.70	24.2	1.00	15.9
0.11	45.6	0.41	34.1	0.71	23.9	1.01	15.6
0.12	45.2	0.42	33.7	0.72	23.6	1.02	15.4
0.13	44.8	0.43	33.4	0.73	23.3	1.03	15.2
0.14	44.4	0.44	33.0	0.74	23.0	1.04	14.9
0.15	44.0	0.45	32.6	0.75	22.7	1.05	14.7
0.16	43.6	0.46	32.3	0.76	22.4	1.06	14.5
0.17	43.3	0.47	31.9	0.77	22.1	1.07	14.2
0.18	42.9	0.48	31.6	0.78	21.8	1.08	14.0
0.19	42.5	0.49	31.2	0.79	21.5	1.09	13.8
0.20	42.1	0.50	30.9	0.80	21.2	1.10	13.6
0.21	41.7	0.51	30.5	0.81	20.9	1.11	13.3
0.22	41.3	0.52	30.2	0.82	20.6	1.12	13.1
0.23	40.9	0.53	29.8	0.83	20.3	1.13	12.9
0.24	40.5	0.54	29.5	0.84	20.0	1.14	12.7
0.25	40.1	0.55	29.1	0.85	19.8	1.15	12.5
0.26	39.7	0.56	28.8	0.86	19.5	1.16	12.3
0.27	39.4	0.57	28.4	0.87	19.2	1.17	12.1
0.28	39.0	0.58	28.1	0.88	18.9	1.18	11.9
0.29	38.6	0.59	27.8	0.89	18.7	1.19	11.7
1.20	11.5	1.56	5.94	1.92	2.74	2.46	0.69
1.21	11.3	1.57	5.82	1.93	2.68	2.48	0.66
1.22	11.1	1.58	5.71	1.94	2.62	2.50	0.62
1.23	10.9	1.59	5.59	1.95	2.56	2.52	0.59
1.24	10.7	1.60	5.48	1.96	2.50	2.54	0.55
1.25	10.6	1.61	5.37	1.97	2.44	2.56	0.52
1.26	10.4	1.62	5.26	1.98	2.39	2.58	0.49
1.27	10.2	1.63	5.16	1.99	2.33	2.60	0.47
1.28	10.0	1.64	5.05	2.00	2.28	2.62	0.44
1.29	9.85	1.65	4.95	2.01	2.22	2.64	0.41
1.30	9.68	1.66	4.85	2.02	2.17	2.66	0.39
1.31	9.51	1.67	4.75	2.03	2.12	2.68	0.37
1.32	9.34	1.68	4.65	2.04	2.07	2.70	0.35
1.33	9.18	1.69	4.55	2.05	2.02	2.72	0.33
1.34	9.01	1.70	4.46	2.06	1.97	2.74	0.31
1.35	8.85	1.71	4.36	2.07	1.92	2.76	0.29
1.36	8.69	1.72	4.27	2.08	1.88	2.78	0.27
1.37	8.53	1.73	4.18	2.09	1.83	2.80	0.26
1.38	8.38	1.74	4.09	2.10	1.79	2.82	0.24
1.39	8.23	1.75	4.01	2.12	1.70	2.84	0.23
1.40	8.08	1.76	3.92	2.14	1.62	2.86	0.21
1.41	7.93	1.77	3.84	2.16	1.54	2.88	0.20
1.42	7.78	1.78	3.75	2.18	1.46	2.90	0.19
1.43	7.64	1.79	3.67	2.20	1.39	2.92	0.18
1.44	7.49	1.80	3.59	2.22	1.32	2.94	0.16
1.45	7.35	1.81	3.51	2.24	1.25	2.96	0.15
1.46	7.21	1.82	3.44	2.26	1.19	2.98	0.14
1.47	7.08	1.83	3.36	2.28	1.13	3.00	0.13
1.48	6.94	1.84	3.29	2.30	1.07	3.10	0.10
1.49	6.81	1.85	3.22	2.32	1.02	3.20	0.07
1.50	6.68	1.86	3.14	2.34	0.96	3.30	0.05
1.51	6.55	1.87	3.07	2.36	0.91	3.40	0.03
1.52	6.43	1.88	3.01	2.38	0.87		
1.53	6.30	1.89	2.94	2.40	0.82		
1.54	6.18	1.90	2.87	2.42	0.78		
1.55	6.06	1.91	2.81	2.44	0.73		

* **Mr. M.L. Vijvekate, «Verklarende Statisticks», sayfa 204, Tablo I.**

Alıcılar tarafından alınan numunelerin ortalaması olan **% 48,** $\mu - d = 50.92 - 4.31 = \% \, 46.61$ değerinden daha yüksek olduğu için, sıfır hipotezi caridir, yani alıcıların ortalaması yatağı karakterize eden bir ortalamadır $(\underline{L} > \mu - d)$

Bu şekilde, numunelerin ihtimaller hesabı ile değerlendirilmesi konusunu, bir misalle izah etmiş olduk. Burada olduğu gibi, ihtimaller hesabının tatbikatı ekonomik tahlillerde de büyük bir yer işgal etmekte ve önemini gittikçe artırmaktadır.